$$\int \frac{1+2x+24x^2}{x^{3/2}} e^{2x} dx =$$

Упростим задачу, избавившись от дробной степени заменой

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\, dt$$

Получим

$$= \int \frac{1+2t^2+24t^4}{t^3} e^{2t^2}\, 2t\, dt = \int \frac{1+2t^2+24t^4}{t^2} e^{2t^2}\, 2\, dt =$$

$$= \int \left(\frac{2}{t^2} + 4 + 48t^2 \right) e^{2t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{2}{t^2} e^{2t^2}\, dt + \int 4e^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

Эти три неопределённых интеграла, не выражаются через элементарные функции. Помочь решить задачу может только стечение обстоятельств. Обратим внимание, что если интегрировать по частям произведение $\int t^m e^{t^2}\, dt$, дифференцируя экспоненту и интегрируя степень, то под знаком интеграла степень увеличится на 2. Поэтому, если проинтегрировать по частям только первое слагаемое, то в интегральной части будет выражение, подобное тому, которое стоит под знаком второго интеграла. А если, после приведения этих подобных проинтегрируем по частям второе слагаемое, то в интегральной части будет выражение, подобное тому, которое стоит под знаком третьего интеграла. И есть надежда, что эти подобные взаимно уничтожатся. Итак, проинтегрируем по частям только первый из интегралов.

$$u = e^{2t^2} \Rightarrow du = 4te^{2t^2}\, dt$$

$$dv = \frac{2}{t^2} dt \Rightarrow v = \int \frac{2}{t^2} dt = -\frac{2}{t}$$

$$= -\frac{2}{t} e^{2t^2} + \int \frac{2}{t} 4te^{2t^2}\, dt + \int 4e^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

$$= -\frac{2}{t} e^{2t^2} + \int 8e^{2t^2}\, dt + \int 4e^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

Приведём подобные

$$= -\frac{2}{t} e^{2t^2} + \int 12e^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

Теперь проинтегрируем по частям обновлённое второе слагаемое.

$$u = e^{2t^2} \Rightarrow du = 4te^{2t^2}\, dt$$

$$dv = 12\, dt \Rightarrow v = \int 12\, dt = 12t$$

$$= -\frac{2}{t} e^{2t^2} + 12te^{2t^2} - \int 12t \cdot 4te^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

$$= \left(12t - \frac{2}{t}\right) e^{2t^2} - \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt + \int 48t^2 e^{2t^2}\, dt =$$

«Чудо» свершилось. Интегральные слагаемые взаимно уничтожаются. Осталось только не забыть, что они могли отличаться на произвольную постоянную и приписать в конце: плюс константа.

$$= 2\left(6t - \frac{1}{t}\right)e^{2t^2} + C = 2\left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)e^{2x} + C =$$

$$= \frac{2e^{2x}(6x-1)}{\sqrt{x}} + C$$